I региональный конкурс исследовательских работ им.Д.И.Менделеева

Секция: Математика

Изопериметрическая задача Дидоны

Автор работы:
Ученик 9 класса
МБОУ СОШ №3
Шалимов Николай Николаевич

Место выполнения работы: МБОУ СОШ №3, Пензенская область, г. Кузнецк

Научный руководитель: Сергеева Е.В.

Оглавление

1.Введение

В римской мифологии есть легенда о Дидоне.

Согласно этой легенде, Дидона была дочерью царя Тира и женой жреца Геракла Акербаса. После того как брат Дидоны Пигмалион убил ее мужа, позарившись на его богатства, Дидона была вынуждена бежать. Захватив с собой часть сокровищ мужа, она в сопровождении многочисленных спутников отправилась на запад вдоль берегов Средиземного моря. Ей приглянулось одно место на побережье нынешнего Тунисского залива. Дидона повела переговоры с берберийским царем Ярбом о продаже земли. По условию она могла взять столько земли, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Сделка состоялась. Тогда Дидона разрезала эту шкуру на тонкие ремни, связав их воедино, и окружила изрядный кусок земли. На этом месте была основана цитадель Карфагена Бирса. (По-гречески «бирса» как раз и означает «снятая шкура»)

Так гласит легенда.

Эту историю нам рассказала учитель математики.

Меня заинтересовал вопрос: какой формы был участок земли, который окружила Дидона чтобы получить наибольшую площадь?

Ответ на этот вопрос я, конечно же нашел и узнал, что Дидона сделала круг и что задача Дидоны называется изопериметрической задачей. Говоря современным языком, Дидоне надо было найти среди всех фигур с заданным периметром (длиной верёвки) ту, которая имеет большую площадь.

Я решил провести исследование по этой теме.

Цель работы: найти историю доказательства того, что среди геометрических фигур с равными периметрами наибольшую площадь имеет круг. Показать применение изопериметрической задачи в повседневной жизни.

Объект исследования: изопериметрическая задача Дидоны.

Предмет исследования: приемы решений изопериметрической задачи.

Гипотеза: среди геометрических фигур с равными периметрами наибольшую площадь имеет круг.

2. Немного истории

Попытки строгого доказательства изопериметрических задач предпринимались ещё в древности. Многие выдающиеся мыслители находили различные объяснения максимальности круга и шара.

Вот что писал Николай Коперник в своей великой книге «О вращениях небесных сфер»: «Прежде всего, мы должны заметить, что мир является шарообразным или потому, что эта форма совершеннейшая из всех и не нуждается ни в каких скрепах и вся представляет цельность, или потому, что эта форма среди всех других обладает наибольшей вместимостью, что более всего приличествует тому, что должно охватить и сохранить всё». Если шар вмещает в себя весь мир, то он, конечно, имеет максимальный объём!

В книге Пойа Д. «Математика и правдоподобные рассуждения» написано о том, что «уже древнегреческим математикам был известен ответ в изопериметрической задаче: в плоском случае искомая фигура – это круг (а в пространственном – шар). На эту мысль, наводит, во-первых, непосредственное сравнение площадей некоторых фигур равного периметра.

Во-вторых, некоторые физические соображения также показывают, что ответ в изопериметрической задаче – это круг или шар. Например, капельки воды и мыльные пузыри неслучайно имеют форму шара: силы поверхностного натяжения действуют так, чтобы уменьшать площадь поверхности.

В -третьих, древние греки считали круг наиболее совершенной фигурой. Именно такую форму имеют небесные тела и их орбиты. Это соображение увеличивало их уверенность в том, что именно круг, помимо других своих интересных свойств, должен также быть решением изопериметрической задачи.

Но вот геометрически древние греки доказать этого не могли.

Древнегреческий математик Зенодор, живший в II веке до н. э. в Александрии, дал вполне строгое, даже с позиций сегодняшнего дня, обоснование следующего факта: если для данного n существует n-угольник периметра 1, имеющий максимальную площадь, то это — правильный n-угольник.

Зенодор написал целый трактат «Об изопериметрических фигурах». Хотя трактат Зенодора не сохранился, некоторые его результаты дошли до нас в изложении математиков Паппа (III в. н. э.) и Теона (IV в. н. э.), в том числе следующие теоремы:

- из двух треугольников с общей стороной и равными периметрами меньше площадь того, которому принадлежит наибольший из четырех углов, прилежащих к этой стороне (отсюда сразу следует, что из всех треугольников равного периметра, имеющих общее основание, площадь максимальна у равнобедренного треугольника);
- при одинаковом числе сторон и равных периметрах площадь правильного многоугольника больше, чем неправильного;
- из двух правильных многоугольников с равными периметрами больше площадь того, у которого больше сторон

Таким образом, чем «ближе» многоугольник к кругу, тем, действительно, больше его изопериметрическое частное.

3. Миф о Дидоне и метод Якоба Штейнера

Теперь возвратимся к нашей легенде. Догадалась ли Дидона, что искомая фигура — круг? Кто знает... Известно лишь, что легендарная царица и на этот раз сумела урвать лишний кусок — она выбрала свой участок на берегу моря, так что вся морская граница досталась ей даром. За этой женщиной придется признать крупный геометрический талант: ведь изопериметрическая задача строго была решена лишь в прошлом веке швейцарским геометром Якобом Штейнером((1796-1863), а ее «карфагенский вариант» — с учетом того, что часть замкнутой кривой представляет собой прямую линию «побережья», — и того позже.

Задача Штейнера звучит следующим образом*: среди всевозможных плоских замкнутых линий заданной длины найдите ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади.*

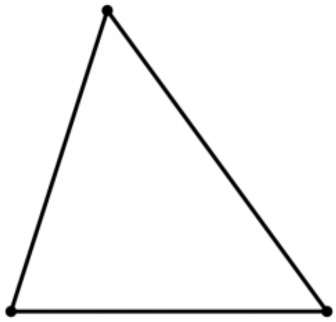
Якоб Штейнер доказал, что если фигура наибольшей площади среди всех фигур данного периметра существует, то это — круг. В ходе рассуждений осталось недоказанным одно утверждение, на которое он опирался: что искомая фигура существует. Сам Штейнер этот недостаток доказательства не устранил. Это было сделано позднее другими математиками Ф. Эдлером и Константином Каратеодори.

С изопериметрической задачи по существу начинается одно из важнейших направлений современной математики — вариационное исчисление.

4.Мои исследования

Для решения задачи на нахождения фигуры с наибольшей площадью я провел исследование плоских фигур, изучаемых в 8 классе. Для удобства вычислений периметр приму 120 см.

4.1 Исследование площадей треугольников с одним и тем же периметром 120 см.

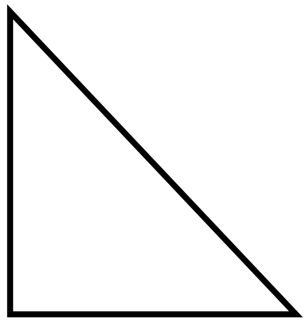


1)Произвольный треугольник со сторонами 40 см, 55 см, 25см.Найдем его площадь по формуле Герона:

S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ = $\sqrt{60(60-40)(60-55)(60-25)}$

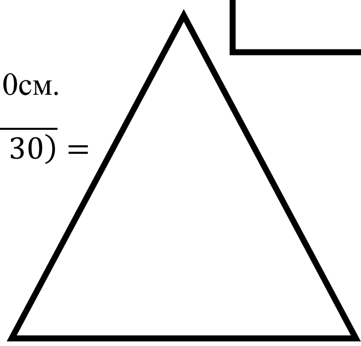
= $\sqrt{60 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 35}$ = $\sqrt{210000} = \sqrt{21 \cdot 10000} = 100\sqrt{21} \approx \mathbf{458}$ см^2, где

р = $\frac{P}{2}$ – полупериметр.



2)Прямоугольный треугольник со сторонами 30 см, 40 см, 50см. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

$S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = \mathbf{600}$ см^2.



3)Равнобедренный треугольник со сторонами 45см, 45 см, 30см.

S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ = $\sqrt{60(60-45)(60-45)(60-30)} =$

$\sqrt{60 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 30} = \sqrt{405000} \approx \mathbf{636}$ см^2.

4)Равносторонний треугольник со стороной 40см.

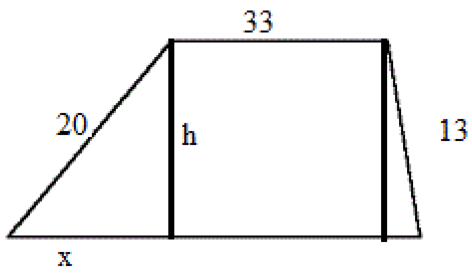
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{60(60-40)(60-40)(60-40)} =$$

$\sqrt{60 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20} = \sqrt{480000} = \sqrt{3 \cdot 16 \cdot 10000} = 400\sqrt{3} \approx \mathbf{693}$ см^2.

Вывод: из всех треугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

4.2 Исследование площадей трапеций с одним и тем же периметром равным 120 см.

1) Произвольная трапеция со сторонами 13 см, 20 см, a = 33 см, b = 54 см.



Воспользуемся формулой площади трапеции: $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Найдем высоту по теореме Пифагора: $h = \sqrt{20^2 - x^2} = \sqrt{13^2 - (21 - x)^2}$

$$\sqrt{400 - x^2} = \sqrt{169 - 441 + 42x - x^2}$$

$$-x^2 + x^2 - 42x = 169 - 441 - 400$$

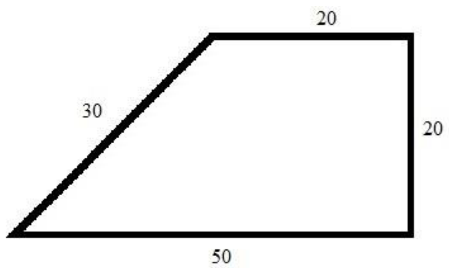
$$-42x = -672$$

$$x = 16$$

$$h = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$$

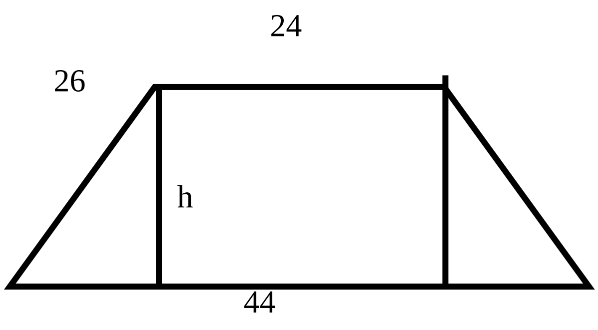
Подставляем под формулу: $S = \frac{1}{2}(33 + 54) \cdot 12 = \mathbf{522}$ см^2.

2) Прямоугольная трапеция со сторонами 20 см, 30 см, a = 20 см, b = 50 см.



$S = \frac{1}{2}(20 + 50) \cdot 20 = \mathbf{700}$ см^2.

3) Равнобедренная трапеция со сторонами 26 см, 26 см, a = 24 см, b = 44 см.



$h = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$

$S = \frac{1}{2}(24 + 44) \cdot 24 = \mathbf{816}$ см^2.

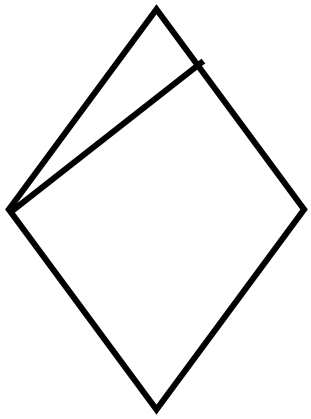
Вывод: из всех трапеций с одним и тем же периметром наибольшую площадь имеет равнобокая трапеции.

4.3 Исследование площадей параллелограммов с одним и тем же периметром равным 120 см.

1) Параллелограмм со сторонами 15 и 45 см и острым углом в 30°. $S = ah$, $h = \frac{1}{2}a = 7{,}5$

$S = 45 \cdot 7{,}5 = \mathbf{337{,}5}$ см^2.

2) Ромб со стороной 30 см и острым углом в 30°.



$$\mathrm{S} = ah = 30 \cdot 15 = \mathbf{450} \text{ см}^2.$$

3) Прямоугольник со сторонами 20 и 40 см.

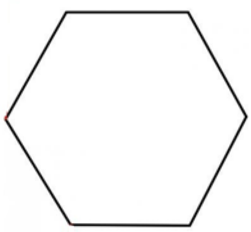
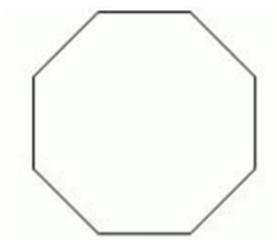
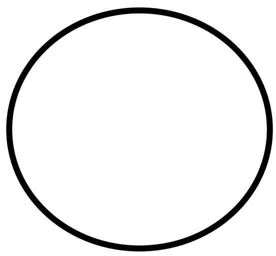
$S = ab = 20 \cdot 40 = \mathbf{800}$ см^2.

4) Квадрат со стороной 30 см.

$S = a^2 = 30^2 = \mathbf{900}$ см^2.

Вывод: из всех параллелограммов с одним и тем же периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

4.4. Найдем также площади правильного 6-угольника, 8-угольника с периметром 120см и круга, длина окружности которого 120 см.

6-угольник

a = R=20 $\quad S = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{2} = \frac{20^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1020}$ **см^2**

8-угольник со стороной 15см:

$S = a^2 2(\sqrt{2} + 1) = 15^2 \cdot 2 \cdot 2{,}4 = \mathbf{1080}$ см^2

Круг, длина окружности 120см:

$S = \pi r^2$

$l = 2\pi r \ \rightarrow 120 = 2\pi r \ \rightarrow r \approx 19$

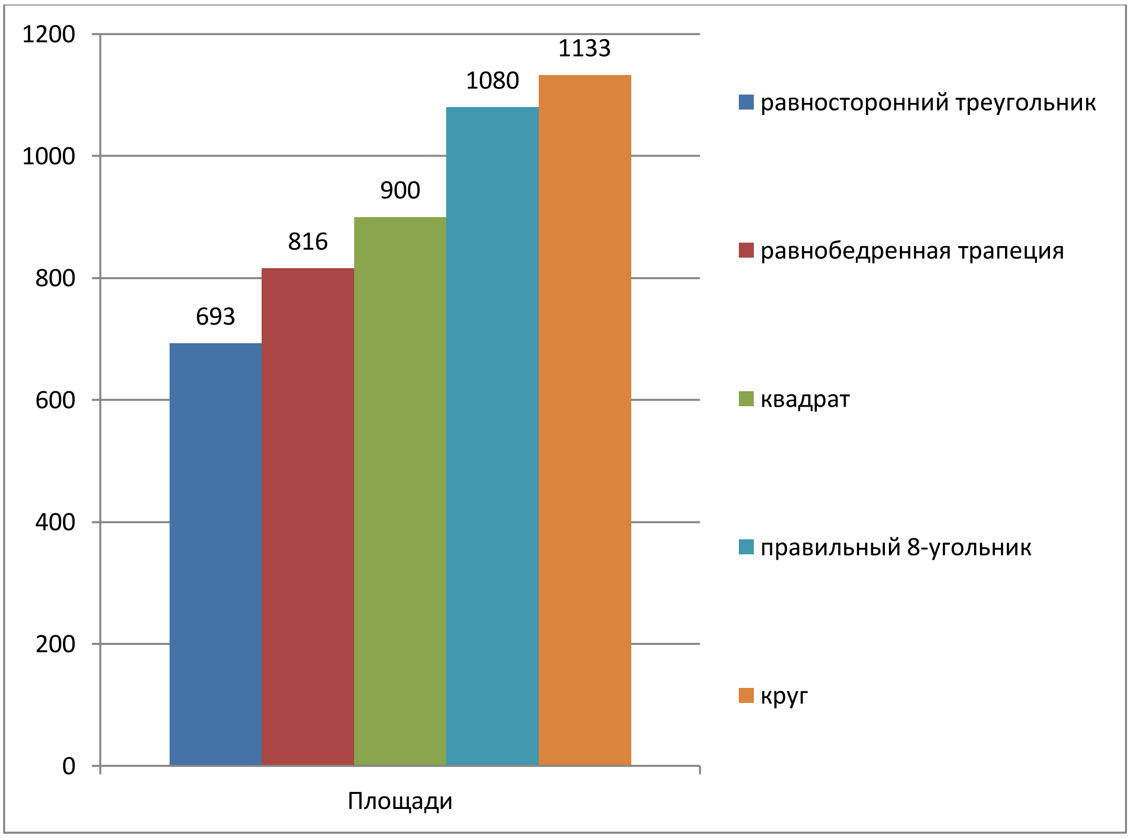
$S = 3{,}14 \cdot 19^2 \approx \mathbf{1133}$ см^2.

В результате моего исследования получилось:

- наибольшую площадь имеют правильные фигуры, и чем больше количество сторон у этой фигуры, т.е. чем ближе она к кругу, тем площадь тоже больше;

- самой же большой площадью обладает круг, что подтверждает изопериметрическая задача.

Построим диаграмму по результатам исследования:



5. Применение изопериметрической задачи на практике

Задача 1. *Рассекатель газовой горелки имеет форму круга диаметром 7 см. Рассчитать на сколько процентов увеличится расход газа, если круглый рассекатель заменить*

-квадратным ;

-треугольным той же площади

Решение.

1.Для круглой формы

С= $2\pi r = 2 \cdot 3.14 \cdot 3{,}5$ =21, 98 см.

$S = \pi r^2$ = 38,465 см^2

2. Для квадратной формы

$a = \sqrt{S}$=6,2 см, Р= $6,2 \cdot 4$ =24,8 см;

$$\frac{24{,}8 - 21{,}98}{21{,}98} = 13(\ \%)$$

3. Для формы правильного треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}$ = 9,5 см,

Р = 9,5·3 = 28, 5 см;

$$\frac{28{,}5 - 21{,}98}{21{,}98} = 30(\%)$$

Вывод: если форму рассекателя газовой горелки заменить с круглой на квадратную той же площади, то расход газа увеличится на 13%, а если на треугольную правильной формы- то увеличится на 30%.

Задача 2 Почему канализационный люк круглый?

Практически все люки в городе прикрыты специальными крышками круглой формы.

Выясним, приведет ли изменение формы люка к изменению его стоимости.

Диаметр лаза люка в действующих стандартах близкий к 600 мм.

Практически все люки в городе прикрыты специальными крышками круглой формы.

Выясним, приведет ли изменение формы люка к изменению его стоимости.

Диаметр лаза люка в действующих стандартах близкий к 600 мм.

-при круглой форме длина окружности корпуса С= $2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 =$ 1,88 м,

-при квадратной форме $P = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ м,

-площадь крышки круглой формы $S = \pi r^2 = 0{,}28$ м²,

-площадь крышки квадратной формы $S = a^2 = 0{,}36$ м².

Таким образом перерасход материалов на производство люка при переходе от круглой к квадратной его форме составит $\frac{0{,}36}{0{,}28}$ = 28 %

Кроме того, *квадратная крышка может провалиться в люк, чего никогда не случиться с круглой крышкой*.

Задача3. *В Кузнецкой кузнице «Кузнец58» один погонный метр кованного забора стоит 3100 рублей. Определить наименьшую стоимость изгороди, если требуется оградить участок площадью 400 м^2. Сравнить разные варианты.*

Решение.

1. Наименьшая стоимость будет в том случае, если участок будет иметь форму круга.

$S = \pi r^2$. $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{400}{3,14}} = 11$ м. $C = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 11 = 69,08$ м.

Стоимость составит 69,08·3100 = 214148 рублей.

2. Если ограда будет иметь форму квадрата, то сторона квадрата равна $a = \sqrt{S} = 20$ м, периметр - 20·4=80 м, стоимость 80·3100 = **248 000 рублей.**

3. Если ограда будет иметь форму прямоугольника со сторонами 25 м и 16 м, то его периметр 82 м, а стоимость 82·3100**= 254000 рублей.**

Задача4. *Возвращаясь к задаче царицы Дидоны, рассчитаем территорию, которую заняла Дидона.*

В интернете я нашел приблизительную площадь бычьей шкуры-35800 см². Разрежем ее на полоски шириной 0,5 см, тогда длина полуокружности равна будет 71600 см или 716 м.

C=2πR, $\frac{C}{2}$ = πR,

R=716:3,14 ≈ 228(м)

Sкруга=πR²,

S круга =3,14·228² ≈ 163230(м²)

S полукруга = Sкруга: 2 = 81615(м²)

На площади 81615 м² можно было даже построить крепость.

6. Изопериметрическая задачи в пространстве

Изопериметрической теореме в пространстве мы склонны верить без математического доказательства.

Сама природа расположена в пользу шара. Дождевые капли, мыльные пузыри Солнце, Луна, наша Земля, планеты шарообразны или почти шарообразны.

Немного зная физику поверхностного натяжения, можно научиться изопериметрической теореме у мыльного пузыря. Будучи сжаты окружающей средой, они стремятся в силу сцепления образовать при неизменном объеме более толстую поверхностную пленку.

То же можно сказать про кота, который в холодную ночь сворачивается в клубочек и таким образом делает своё тело насколько возможно шарообразным. Пытаясь сохранить тепло, он уменьшает свою поверхность. Таким образом, он решает задачу о теле с данным объемом и наименьшей поверхностью.

Рассмотрев эту проблему, можно ответить на вопрос: почему нефтехранилища на крупных заводах всегда делаются цилиндрическими (а иногда даже шарообразными), а не в виде, скажем, куба, что технологически было бы гораздо удобнее?

«Всё моё, моё!» — говорит жадный человек, собирая свои руки в круг, показывая, как много добра он может ими захватить. При этом не подозревая, что демонстрирует решение одной из самых древних задач математики — изопериметрической задачи.

Заключение

Итак, в своей работе для достижения цели мною были проведены эксперименты, решены задачи и обоснована изопериметрическая проблема: среди геометрических фигур на плоскости с равными периметрами наибольшую площадь имеет круг.

В дальнейшем я могу продолжить изучение данной задачи, исследовать пространственные фигуры и с помощью эксперимента показать, что из всех тел, ограниченных поверхностью данной величины, наибольший объем у шара.

Ежедневно в нашей жизни нам встречаются задачи на нахождение наибольших или наименьших значений, потому что разумный человек непременно ищет такой путь, который поможет ему достигнуть наибольшей выгоды. Но при этом мы даже и не подозреваем, что в таком простом бытовом случае мы решаем изопериметрические задачи.

Учитель мне сказала, что изопериметрические задачи также относят к классу так называемых «экстремальных задач». Обычно такие задачи изучаются в курсе алгебры и начал анализа и решаются с помощью производной (вот и я их буду в 11 классе решать!).

Задача же Дидоны- классическая экстремальная задача по геометрии.

Литература и интернет-ресурсы

1. Крыжановский А.Б. «Изопериметры» М. - Л.,Физматлит, 1959 г.

2. Олехник С. Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. «Старинные занимательные задачи».- 2-е изд. исправленное,- Москва «Наука», 1988.

3. Перельман Я. И. «Живая математика». Москва «Наука», 1978 г.

4. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учащихся 5–7 кл. – М.: Просвещение, 2002.

5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

6. Шарыгин Д. Миф о Дидоне и изопериметрическая задача. «Квант» №1, 1997г.

7. Шарыгин И. Ф.Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982.

8. http://naukoved.ru

9. http://kvant.mccme.ru

10. http://goo.gl/PeqffB

11. http://philipok4.narod.ru/Tuser7/Starinnye_zadachi.pdf